THEME 2 : Lois et modèles

C10 Mouvements des satellites et des planètes

III. Les lois de Kepler

Enoncés

- **1ère loi** : dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'une planète est une ellipse dont l'un des foyers est le Soleil.
- **2nde loi** : le segment [SP] qui relie le centre du Soleil à celui de la planète balaie des aires égales pendant des des durées égales
- **3ième loi** : le carré de la période de révolution T est proportionnel au cube de la longueur a du demi-grand axe de son orbite :

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

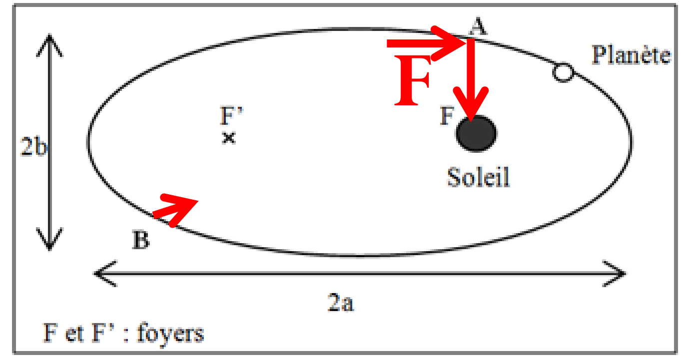
T en seconde (s)
a en mètre (m)
k : constante ($s^2.m^{-3}$)

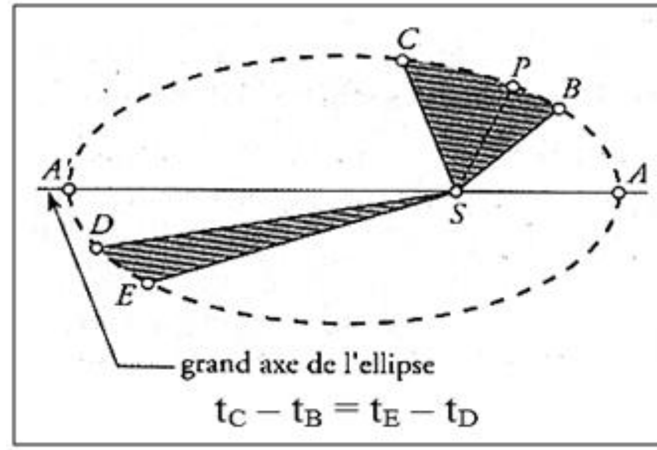
$$k = \frac{4\pi^2}{GM}$$

NB : k ne dépend pas de la masse du satellite mais uniquement de celle de l'astre autour duquel tourne le satellite.

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G.M_{Terre}}}$$

Animation





☞ Représenter la force gravitationnelle s'exerçant sur la planète aux points A et B sur la première figure. Comparer les vitesses en ces points.

La planète est plus attirée par le Soleil en A donc va plus vite qu'en B.

☞ Retrouver ce résultat en travaillant sur la loi des aires.

Pour la même durée, quand la planète est plus proche du Soleil, elle doit parcourir une plus grande distance donc va plus vite.

☞ A quelle condition le mouvement d'une planète serait-il uniforme ?

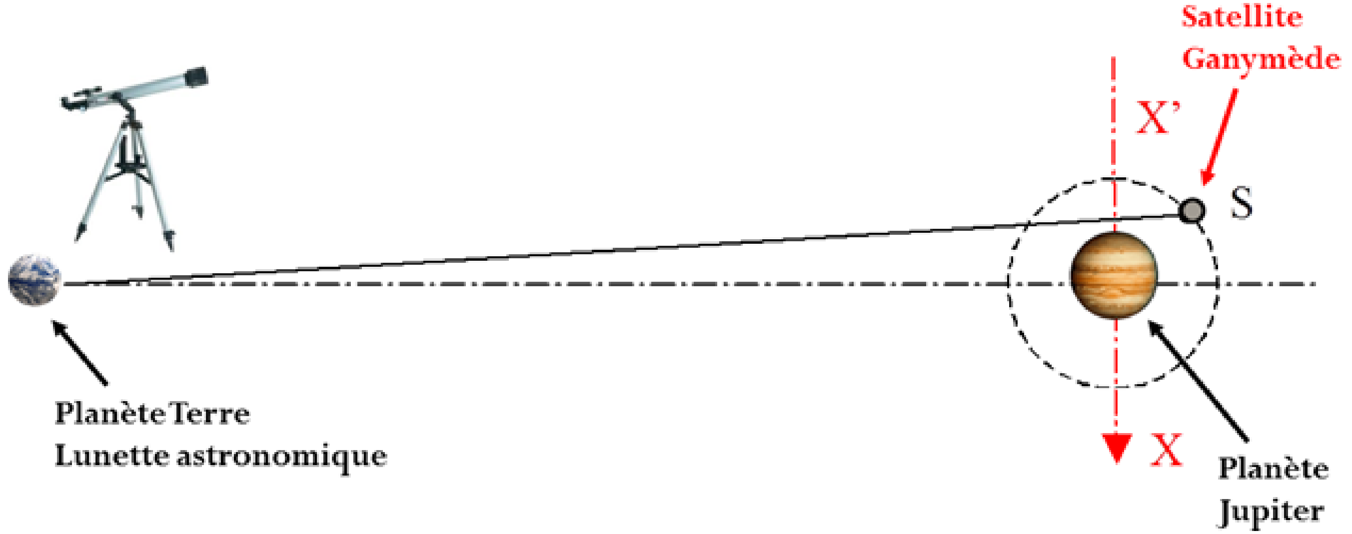
Il faudrait que la force soit d'égale intensité en tout point de l'orbite donc que la planète soit toujours à la même distance du Soleil => orbite circulaire.

Exploitation de la troisième loi de Kepler : ***détermination de la masse de Jupiter***

Jupiter a quatre satellites dénommés IO, EUROPE, GANYMEDE, et CALLISTO. En première approximation, on peut considérer que ces satellites évoluent sur des trajectoires circulaires.

On pointe depuis la Terre une lunette astronomique centrée sur Jupiter : on obtient une série de photographies des satellites de Jupiter prises, depuis la Terre à des dates successives indiquées sous chacune d'elles. On repère les positions successives d'un de ces satellites, Ganymède, repéré par une flèche.

A l'époque où ces photographies ont été prises, la distance séparant les centres de la Terre et de Jupiter valait environ 4,46 u.a.

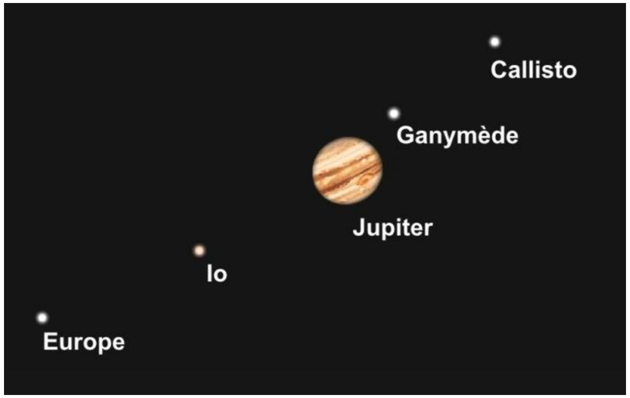


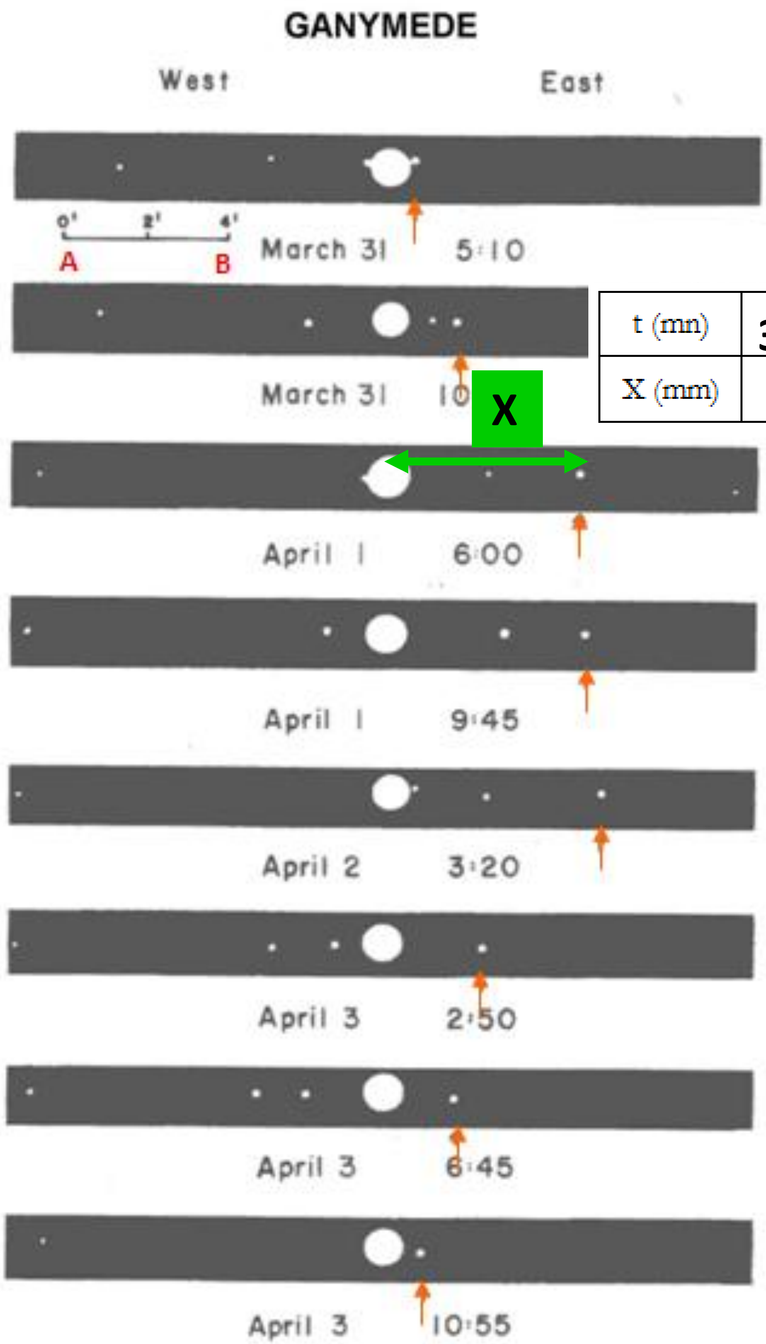
1 u.a. = rayon de l'orbite terrestre = 15.10^{10} m

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J}}$$

Pour calculer la masse de Jupiter il faut connaître

- sa période de révolution
- le rayon de son orbite





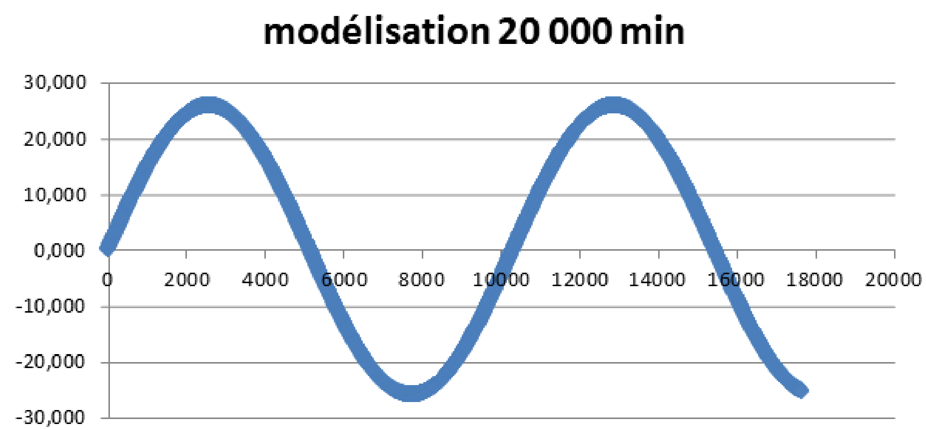
1. Décrire le mouvement d'un satellite de Jupiter vu de la Terre :

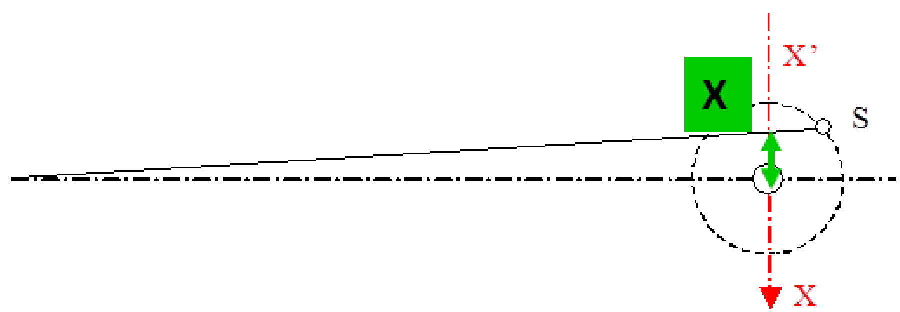
Ganymède se déplace sur une horizontale de gauche à droite puis de droite à gauche.

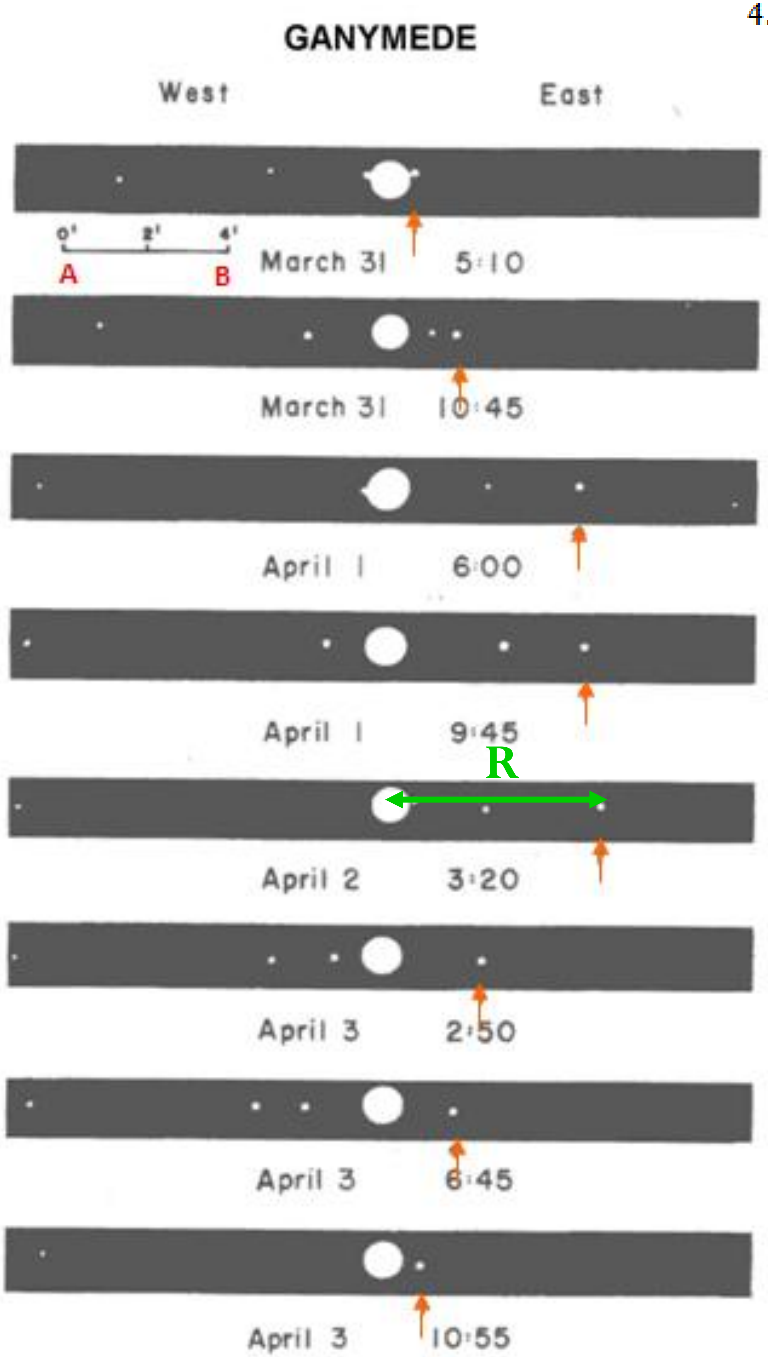
2. A partir de ces photographies, compléter le tableau en choisissant comme origine des dates le 31 mars à 0h.

t (mn)	310	645	1800	2025	3080	4490	4725	4975
X (mm)	3	8	23	24,5	25,5	12	8,5	4,5

3. Sur la calculatrice, tracer la courbe X = f(t). Quelle fonction mathématique est associée à ce graphe ? fonction sinus







4. A l'aide de la calculatrice, chercher l'équation de la courbe et en déduire la période de révolution T de Ganymède autour de Jupiter ainsi que X_{max}. A quoi correspond X_{max} ?

Graphique : F1 (Calc) puis F6 et F5 pour choisir la fonction « Sin » :

$$y = a.\sin(bx + c) + d$$

Rappel de l'activité 1 P.204 : $x(t) = R\cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$

$$b = \frac{2\pi}{T} = 6{,}0112.10^{-4}$$

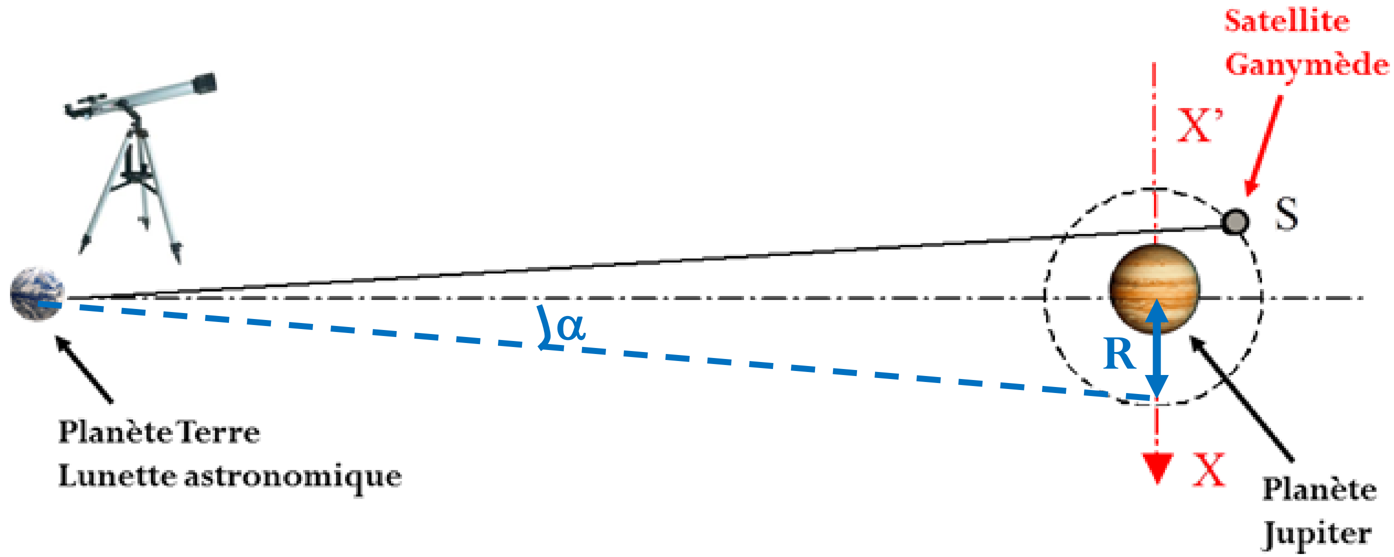
$$T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{6{,}0112.10^{-4}} \approx 10452 \text{ mn} \approx$$

$$T \approx 6{,}27.10^{5}\text{s}$$

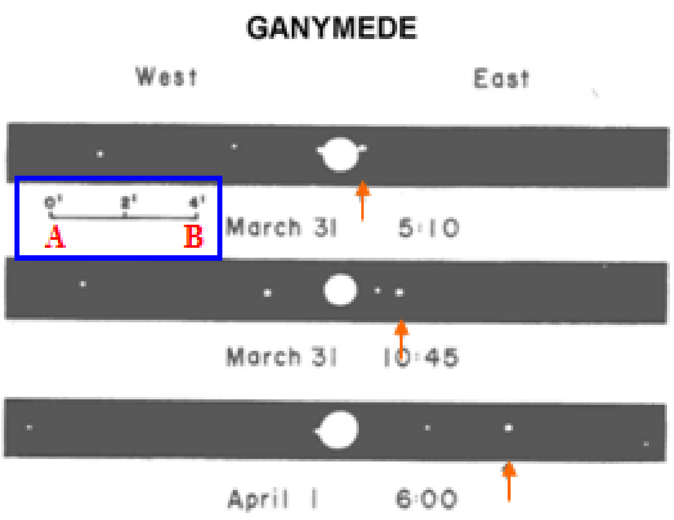
$X_{max} = a = 27{,}48$ mm

X_{max} = Rayon R de l'orbite sur la photo

5. Faire apparaître sur le schéma ci-dessus le rayon apparent de l'orbite de Ganymède : c'est l'angle α sous lequel on voit le rayon R de l'orbite. En utilisant l'échelle de la photographie, calculer α (il est exprimé en « minute d'angle » : 1' = 1/60° : unité adaptée aux angles très petits)



1 u.a. = rayon de l'orbite terrestre = 15.10^{10} m



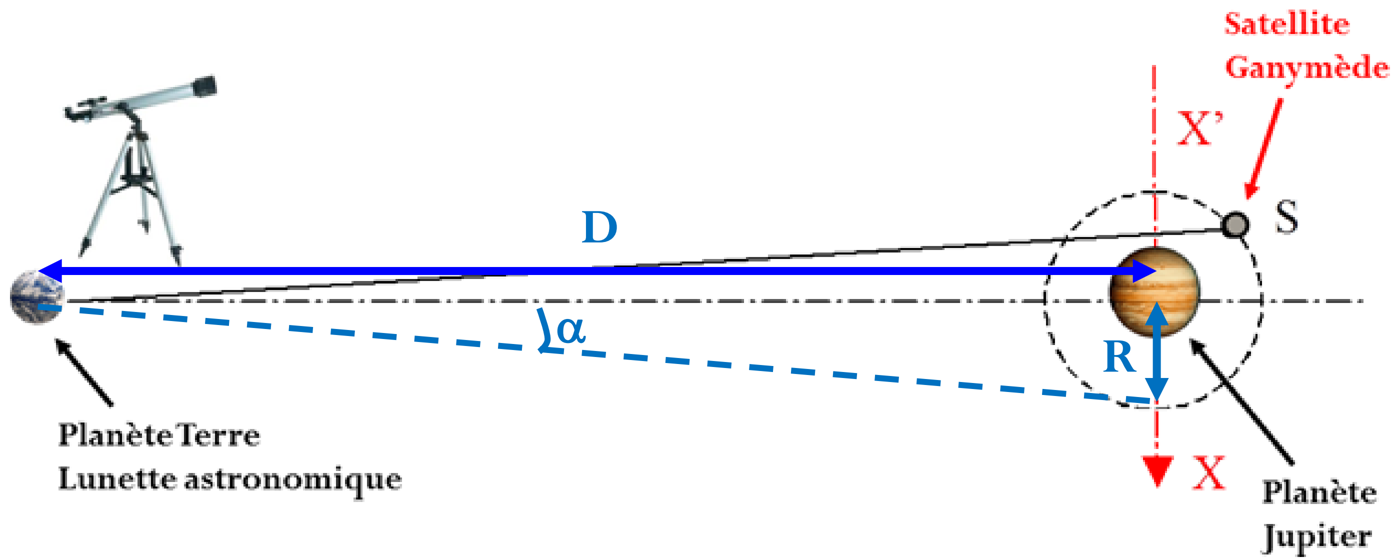
D'après l'échelle, un angle de 4 minutes (4') vu depuis la Terre correspond à 2,0 cm sur le document :

$$4' \leftrightarrow 2{,}0 \text{ cm}$$

donc $\quad \alpha \leftrightarrow X_{max} = 2{,}748$ cm

soit $\quad \alpha = 5{,}496' = 9{,}16.10^{-2}\,°$

6. Faire apparaître la distance Terre-Jupiter D. En déduire l'expression de R puis le calculer.



1 u.a. = rayon de l'orbite terrestre = 15.10¹⁰ m

$$\mathrm{Tan}\,\alpha = \frac{R}{D} \quad \Rightarrow R = D.\,\mathrm{Tan}\,\alpha \quad \text{avec } D = 4{,}46 \text{ u.a.} =$$

$$D = 4{,}46 \times 15.\,10^{10} = 6{,}69.\,10^{11}\ \mathrm{m}$$

$$R = 6{,}69.\,10^{11}\,.\,\mathrm{Tan}\,9{,}16.\,10^{-2} \approx 1{,}07.\,10^{9}\ \mathrm{m}$$

7. En déduire la masse de Jupiter (3ème loi de Kepler) $T \approx 6{,}27.10^5 s$ $R \approx 1{,}07.10^9$ m

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J} \Rightarrow M_J = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (1{,}07.10^9)^3}{6{,}67.10^{-11}(6{,}27.10^5)^2} =$$

$$\boxed{M_J \approx 1{,}84.10^{27}\ \text{kg}}$$

Masse	$1{,}8986 \times 10^{27}$ kg (317,8 Terres)