THEME 2 : Lois et modèles

C9 Lois de Newton

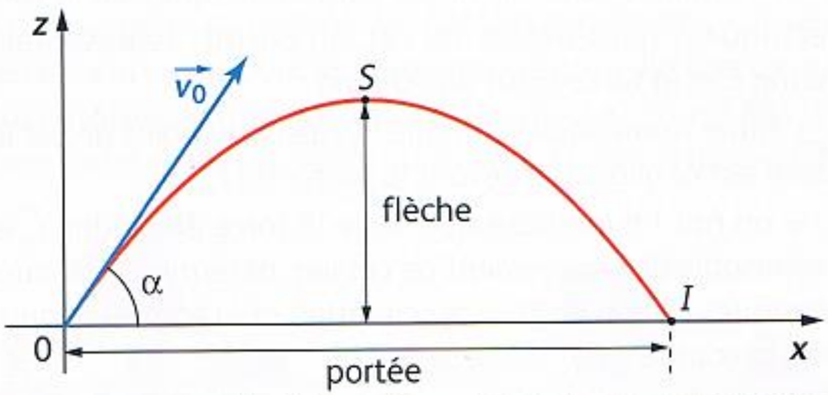
En AP
N°30 et 27 P.194

30 ✶✶ Flèche et portée

Compétences générales *Effectuer un raisonnement scientifique – Commenter un résultat*

Une balle de golf, que l'on modélisera par un point matériel A, est lancée d'un point O, situé au niveau du sol avec une vitesse $\vec{v_0}$, vecteur formant un angle α avec l'horizontale.

On appelle « flèche » l'altitude la plus élevée atteinte par le projectile et « portée » la distance entre le point de lancement O et le point d'impact I sur le sol.



On suppose que les interactions de la balle avec l'air sont négligeables.

a. Donner l'expression des coordonnées v_{0x} et v_{0z} dans le repère $\{O ; \vec{i}, \vec{k}\}$ du vecteur vitesse $\vec{v_0}$ à l'instant $t_0 = 0$ s de lancement de la balle en fonction de v_0 et de α.

b. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du projectile et en déduire les coordonnées a_x et a_z dans le repère $\{O ; \vec{i}, \vec{k}\}$.

c. Établir que les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ du projectile sont :

$$v_x = v_0 \cos\alpha \quad \text{et} \quad v_z = -gt + v_0 \sin\alpha.$$

d. Établir que les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OA}$ du projectile sont les suivantes :

$$x = (v_0 \cos\alpha)\, t$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t$$

puis en déduire l'équation de la trajectoire du projectile.

a. $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

$v_{0z} = v_0 \sin\alpha$

b. La balle est soumise à une seule force, son poids.

Deuxième loi de Newton : $\qquad \overrightarrow{F_R} = m\,\vec{a}$

$m\vec{a} = \vec{P}$ soit $\vec{a} = \vec{g}$

$a_x = 0 \qquad a_z = -g$

c. Par intégration, $v_x = C_1 = v_0 \cos\alpha$

$v_z = -gt + C_2 = -gt + v_0 \sin\alpha$

d. Par intégration, $x = (v_0 \cos\alpha)t + C_3 = (v_0 \cos\alpha)t$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha)t + C_4$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha)t$$

'équation de la trajectoire

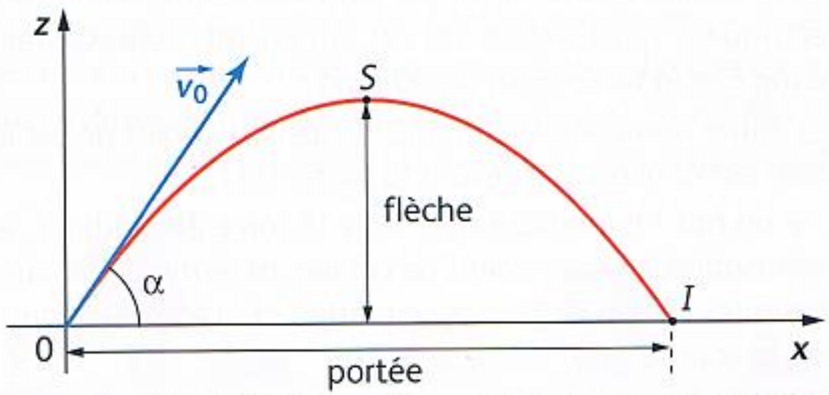
$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \quad donc \quad z = \frac{-gx^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + (\tan\alpha)\, x$$

30 ✶✶ Flèche et portée

Compétences générales *Effectuer un raisonnement scientifique – Commenter un résultat*

Une balle de golf, que l'on modélisera par un point matériel A, est lancée d'un point O, situé au niveau du sol avec une vitesse $\vec{v_0}$, vecteur formant un angle α avec l'horizontale.

On appelle « flèche » l'altitude la plus élevée atteinte par le projectile et « portée » la distance entre le point de lancement O et le point d'impact I sur le sol.



On suppose que les interactions de la balle avec l'air sont négligeables.

a. Donner l'expression des coordonnées v_{0x} et v_{0z} dans le repère $\{O\,;\vec{i},\vec{k}\}$ du vecteur vitesse $\vec{v_0}$ à l'instant $t_0 = 0$ s de lancement de la balle en fonction de v_0 et de α.

b. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du projectile et en déduire les coordonnées a_x et a_z dans le repère $\{O\,;\vec{i},\vec{k}\}$.

c. Établir que les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ du projectile sont :

$$v_x = v_0 \cos\alpha \quad \text{et} \quad v_z = -gt + v_0 \sin\alpha.$$

d. Établir que les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OA}$ du projectile sont les suivantes :

$$x = (v_0 \cos\alpha)\,t$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t$$

puis en déduire l'équation de la trajectoire du projectile.

e. La valeur de la vitesse est-elle nulle au point S ?

f. Déterminer l'expression de la flèche.

g. Établir les coordonnées du point d'impact I de la balle sur le sol et indiquer l'expression de la portée du tir.

h. Calculer la flèche et la portée quand $\alpha = 30°$ et $v_0 = 18\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

e. Non : la vitesse verticale est nulle mais la balle garde sa vitesse horizontale $v_x = v_0 \cos\alpha$.

f. Au point S,

$v_{Sz} = 0$ soit $-gt_S + v_0 \sin\alpha = 0$

$$t_S = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$z_S = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

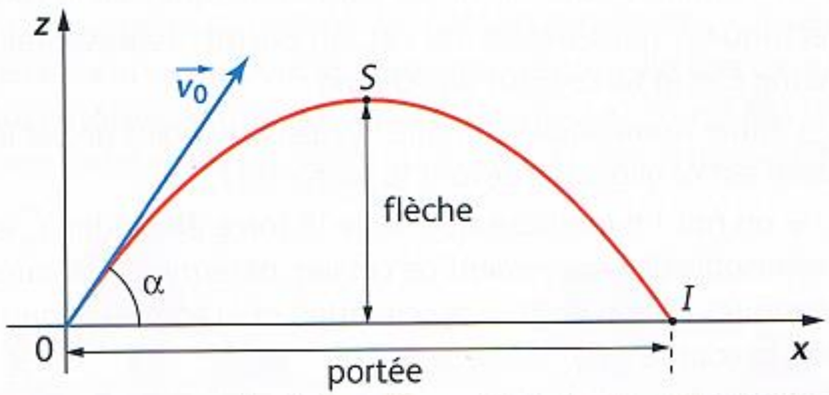
$$z_S = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

30 ✶✶ Flèche et portée

Compétences générales *Effectuer un raisonnement scientifique – Commenter un résultat*

Une balle de golf, que l'on modélisera par un point matériel A, est lancée d'un point O, situé au niveau du sol avec une vitesse $\vec{v_0}$, vecteur formant un angle α avec l'horizontale.

On appelle « flèche » l'altitude la plus élevée atteinte par le projectile et « portée » la distance entre le point de lancement O et le point d'impact I sur le sol.



On suppose que les interactions de la balle avec l'air sont négligeables.

a. Donner l'expression des coordonnées v_{0x} et v_{0z} dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{k})$ du vecteur vitesse $\vec{v_0}$ à l'instant $t_0 = 0$ s de lancement de la balle en fonction de v_0 et de α.

b. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du projectile et en déduire les coordonnées a_x et a_z dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{k})$.

c. Établir que les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ du projectile sont :

$$v_x = v_0 \cos\alpha \quad \text{et} \quad v_z = -gt + v_0 \sin\alpha.$$

d. Établir que les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OA}$ du projectile sont les suivantes :

$$x = (v_0 \cos\alpha)\, t$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t$$

puis en déduire l'équation de la trajectoire du projectile.

e. La valeur de la vitesse est-elle nulle au point S ?

f. Déterminer l'expression de la flèche.

g. Établir les coordonnées du point d'impact I de la balle sur le sol et indiquer l'expression de la portée du tir.

h. Calculer la flèche et la portée quand $\alpha = 30°$ et $v_0 = 18\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

g. La portée du tir correspond à la valeur de la distance *OI* soit à x_I

$$x_I = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

on a $z_I = 0$, soit :

$$\frac{-g x_I^{\ 2}}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + (\tan\alpha)\, x_I = 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$

$$\frac{-g\, x_I}{2\, v_0^{\ 2} \cos^2\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad x_I = \frac{2\, v_0^{\ 2} . \cos\alpha . \sin\alpha}{g}$$

h. Calcul de la flèche et de la portée

$$\text{flèche} : y_S = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 4{,}1\ \text{m}$$

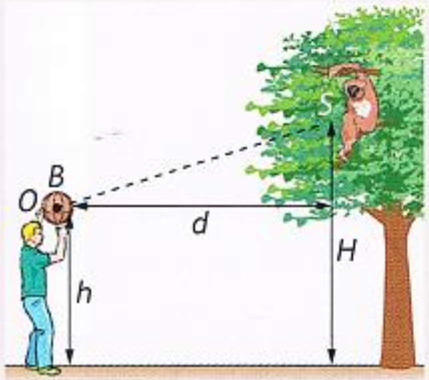
$$\text{portée} : x_I = \frac{2\, v_0^{\ 2} . \cos\alpha . \sin\alpha}{g} = 29\ \text{m}$$

27 Apprendre à chercher

La résolution de cet exercice nécessite de trouver les étapes du raisonnement.
→ Une aide est disponible en fin de manuel.

Énoncé

Un singe et un enfant jouent à la balle. Le singe assis sur une branche d'un arbre voit que l'enfant lance la balle dans sa direction. Joueur et intuitif, il se laisse tomber à l'instant précis du lancer afin de rattraper la balle.

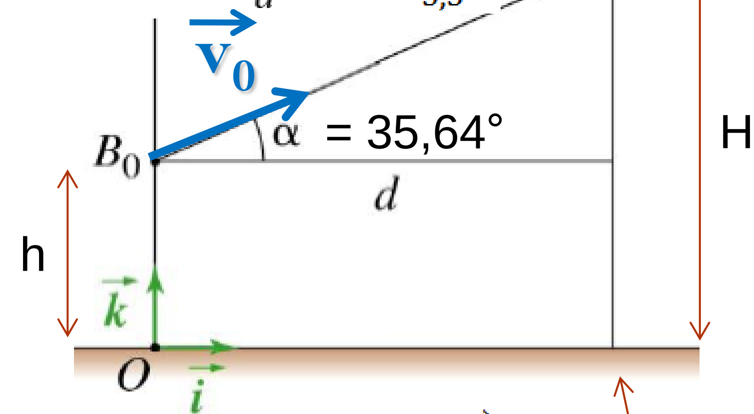


On modélise la balle et le singe par des points matériels *B* et *S*. La balle est lancée à la date $t = 0$ s du point *O* selon la direction OS_0, le point S_0 étant la position du singe à la date $t = 0$ s. On notera $\vec{v}_0$ la vitesse initiale de la balle.

→ *Le singe va t-il rattraper la balle avant qu'elle tombe sur le sol ? si oui, à quelle condition sur v_0 ?*

Données : $h = 1{,}3$ m, $H = 5{,}1$ m et $d = 5{,}3$ m.

$$\tan\alpha = \frac{H-h}{d} = \frac{5{,}1-1{,}3}{5{,}3}$$



D'après la seconde loi de Newton, $\vec{P} = m\,\vec{a_G}$ donc $\vec{a_G} = \vec{g}$ que ce soit pour la balle ou pour le singe.

Conditions (1) : $x_B = x_S$ et $y_B = y_S$ simultanément

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha}$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + h = -\frac{1}{2}gt^2 + H$$

$$\frac{(v_0 \sin\alpha)d}{v_0 \cos\alpha} + h = H \quad \text{soit} \quad \underline{d\tan\alpha = H - h}$$

Toujours vérifié

Pour B	Pour S
$a_{Bx} = 0$ et $a_{Bz} = -g$	$a_{Sx} = 0$ et $a_{Sz} = -g$
$v_{Bx} = v_0 \cos\alpha$ et $v_{Bz} = -gt + v_0 \sin\alpha$	$v_{Sx} = 0$ et $v_{Sz} = -gt$
$x_B = (v_0 \cos\alpha)t$ et $y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + h$	$x_S = d$ et $y_S = -\frac{1}{2}gt^2 + H$

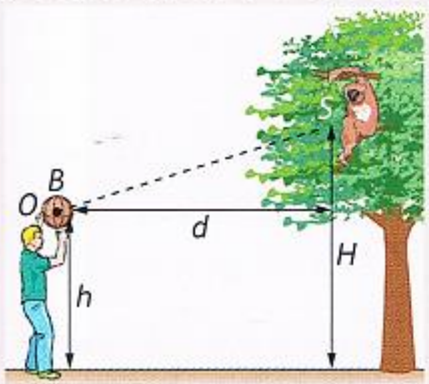
27 Apprendre à chercher

La résolution de cet exercice nécessite de trouver les étapes du raisonnement.

→ Une aide est disponible en fin de manuel.

Énoncé

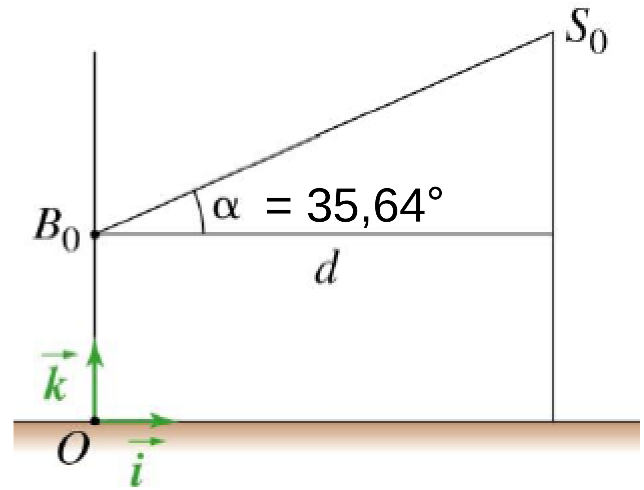
Un singe et un enfant jouent à la balle. Le singe assis sur une branche d'un arbre voit que l'enfant lance la balle dans sa direction. Joueur et intuitif, il se laisse tomber à l'instant précis du lancer afin de rattraper la balle.



On modélise la balle et le singe par des points matériels B et S. La balle est lancée à la date $t = 0$ s du point O selon la direction OS_0, le point S_0 étant la position du singe à la date $t = 0$ s. On notera $\vec{v}_0$ la vitesse initiale de la balle.

→ *Le singe va t-il rattraper la balle avant qu'elle tombe sur le sol ? si oui, à quelle condition sur v_0 ?*

Données : $h = 1{,}3$ m, $H = 5{,}1$ m et $d = 5{,}3$ m.



Condition (2) : Le singe attrape la balle avant de toucher le sol => $y_S > 0$

$$y_S = -\frac{1}{2}gt^2 + H > 0 \quad \text{soit} \quad -\frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + H > 0.$$

$$\frac{d^2}{v_0^2\cos^2\alpha} > \frac{2H}{g}$$

$$v_0^2 = \frac{d^2 g}{2H\cos^2\alpha} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{d^2 g}{2H\cos^2\alpha}}$$

soit $v_0 > 6{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Pour B	**Pour S**
$a_{Bx} = 0$ et $a_{Bz} = -g$	$a_{Sx} = 0$ et $a_{Sz} = -g$
$v_{Bx} = v_0 \cos\alpha$ et $v_{Bz} = -gt + v_0 \sin\alpha$	$v_{Sx} = 0$ et $v_{Sz} = -gt$
$x_B = (v_0 \cos\alpha)t$ et $y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + h$	$x_S = d$ et $y_S = -\frac{1}{2}gt^2 + H$